

Vorlesung 2b

Diskrete Zufallsvariable und ihre Verteilungen

Teil 2:

Die Anzahl der Erfolge:

Vom Münzwurf zur Binomialverteilung

(vgl. Buch S. 22)

1. Vom n -fachen fairen Münzwurf
zur Binomial($n, \frac{1}{2}$)-Verteilung:

$$S := \{0, 1\}^n$$

die Menge der 01-Folgen der Länge n

X sei uniform verteilt auf S ,

jeder Ausgang hat somit das Gewicht

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}.$$

Man sagt dann auch:

X ist ein n -facher “fairer Münzwurf”.

$Y :=$ die Anzahl der Einsen in X .

Was ergibt sich für die Verteilungsgewichte von Y ?

Jede einzelne 01-Folge a der Länge n mit genau k Einsen hat Gewicht $\frac{1}{2^n}$

Es gibt $\binom{n}{k}$ derartiger Folgen a .

Also:

$$\mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Das sind die Gewichte der Binomial($n, \frac{1}{2}$)-Verteilung.

2. Die Anzahl der Sechsen beim fairen Würfeln:

Vom n -fachen Würfeln zur Binomial($n, \frac{1}{6}$)-Verteilung:

(vgl. Buch S. 28)

$X = (X_1, \dots, X_n)$ uniform verteilt auf
 $S := \{1, \dots, 6\}^n$.

$Z := (Z_1, \dots, Z_n)$, mit
 $Z_i := \mathbf{1}_{\{6\}}(X_i)$

Z ist also eine zufällige 01-Folge, mit
 $Z_i = 1$ falls der i -te Wurf eine Sechs ergibt
und $Z_i = 0$ sonst.
Wie ist Z verteilt?

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(Z_1 = 1, \dots, Z_k = 1, Z_{k+1} = 0, \dots, Z_n = 0) \\
&= \mathbf{P}(X_1 = 6, \dots, X_k = 6, X_{k+1} \neq 6, \dots, X_n \neq 6) \\
&= \frac{1^k \cdot 5^{n-k}}{6^n} \\
&= p^k q^{n-k}, \quad \text{mit } p := \frac{1}{6} \text{ und } q := \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Auch für jede andere Platzierung von **genau k "Sechsen"** in den n Würfeln ergibt sich diese W'keit.

Es gibt Es gibt $\binom{n}{k}$ derartige Platzierungen.

Also hat die Verteilung von

$$Y := Z_1 + \cdots + Z_n$$

die Gewichte

$$\mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Das sind die Gewichte der Binomial($n, \frac{1}{6}$)-Verteilung.

3. Vom p -Münzwurf zur Binomialverteilung

(“Was $1/6$ recht ist, soll p billig sein...”)

(Buch S. 22)

Definition (p -Münzwurf):

Sei $p \in [0, 1]$, $q := 1 - p$.

Eine Zufallsvariable Z mit Zielbereich

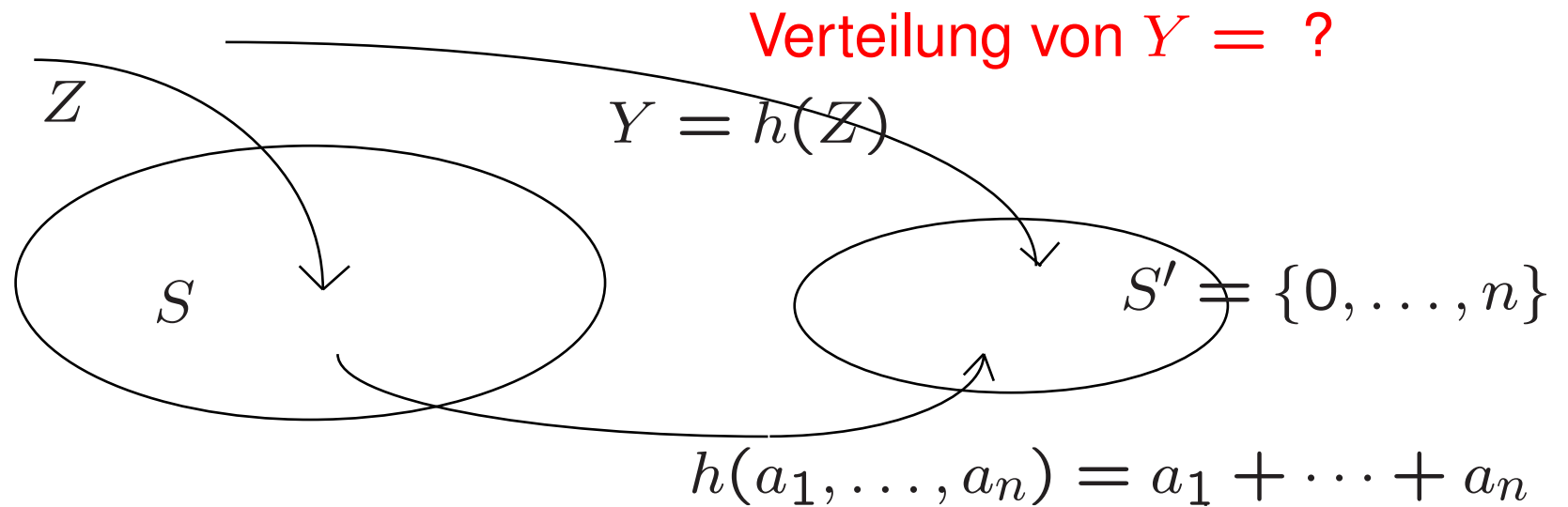
$$S = \{0, 1\}^n = \{a = (a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{0, 1\}\}$$

heißt **n -facher p -Münzwurf**,

wenn für alle $a \in S$ mit k Einsen und $n - k$ Nullen gilt:

$$\mathbf{P}(Z = a) = p^k q^{n-k}.$$

Sei $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ ein n -facher p -Münzwurf
 und $Y = Z_1 + \dots + Z_n =: h(Z)$ die *Anzahl der Erfolge*
 (die Anzahl der Einsen in der zufälligen 0-1 Folge Z)

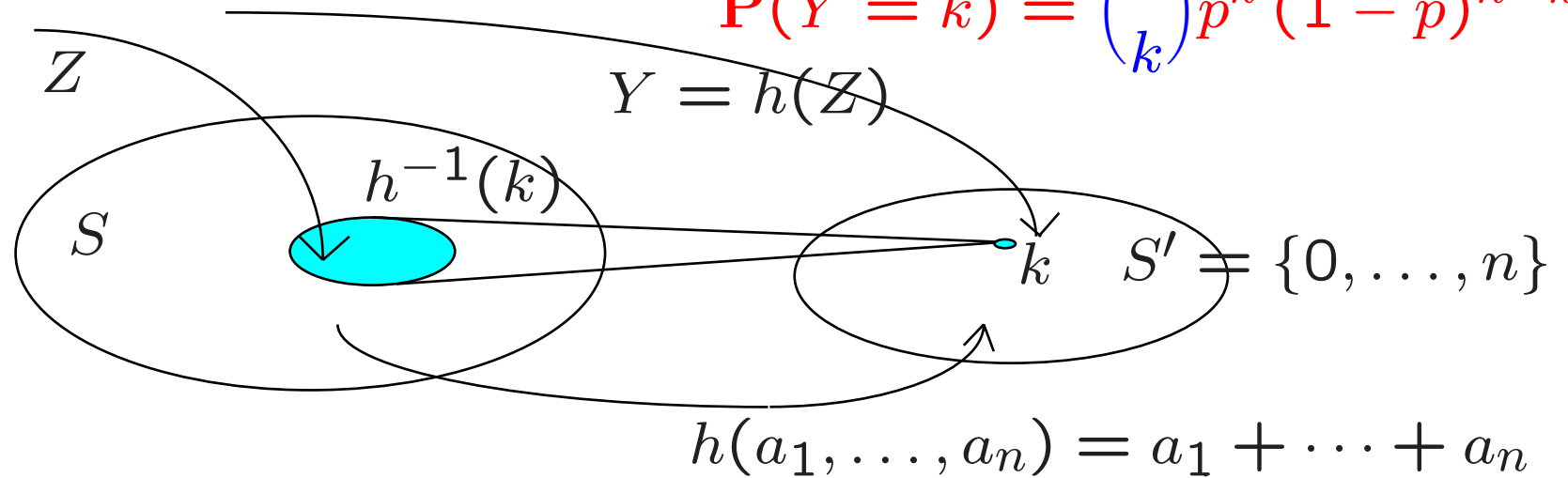


Jedes $a \in S$ mit $h(a) = k$
 (d.h. mit k Einsen und $n - k$ Nullen)

hat Gewicht $p^k (1 - p)^{n-k}$.

Es gibt $\binom{n}{k}$ solche a .

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$



Definition:

Eine Zufallsvariable Y mit Zielbereich $\{0, 1, \dots, n\}$

heißt *binomialverteilt* mit Parametern n und p ,

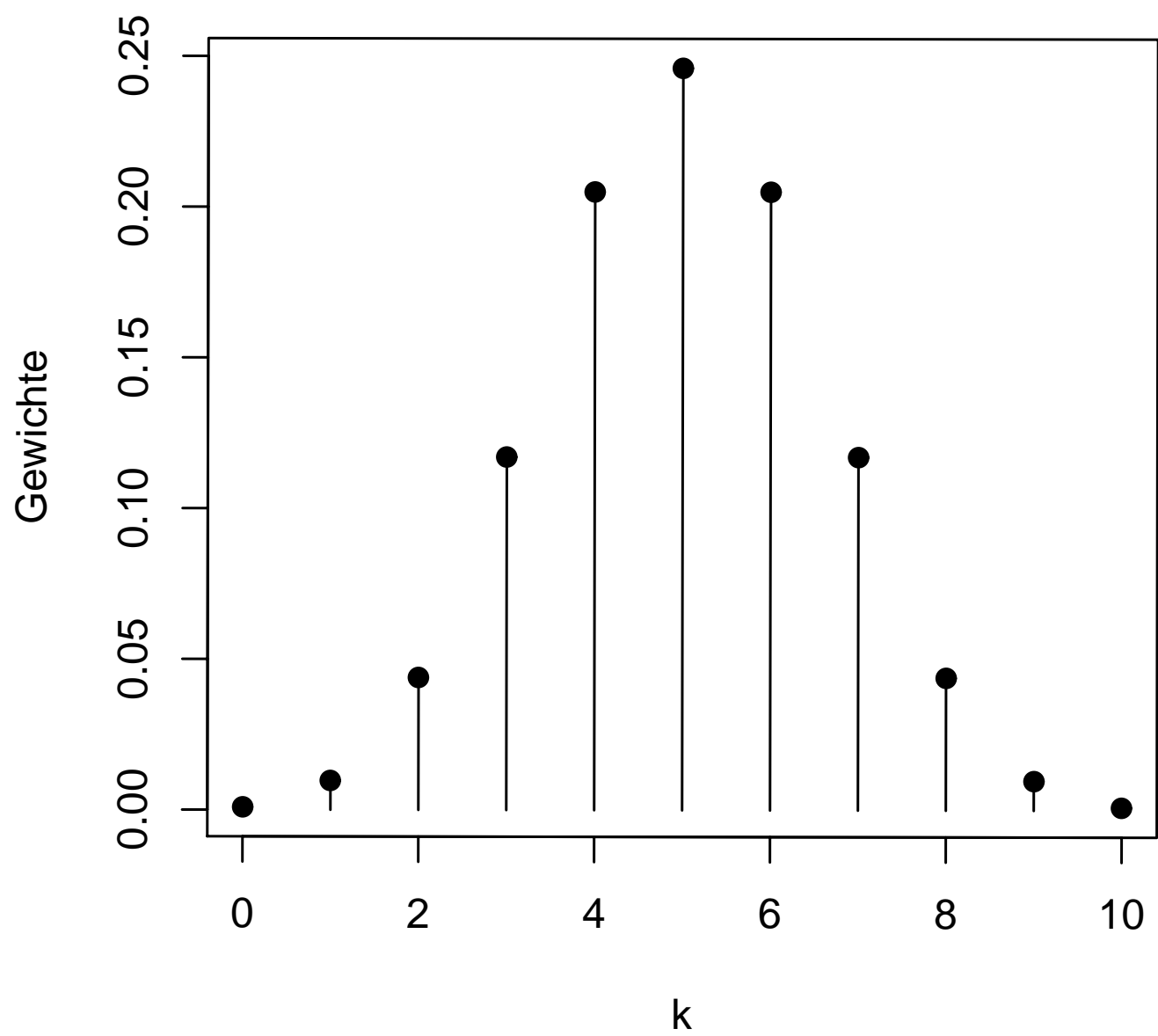
kurz

$\text{Bin}(n, p)$ -verteilt,

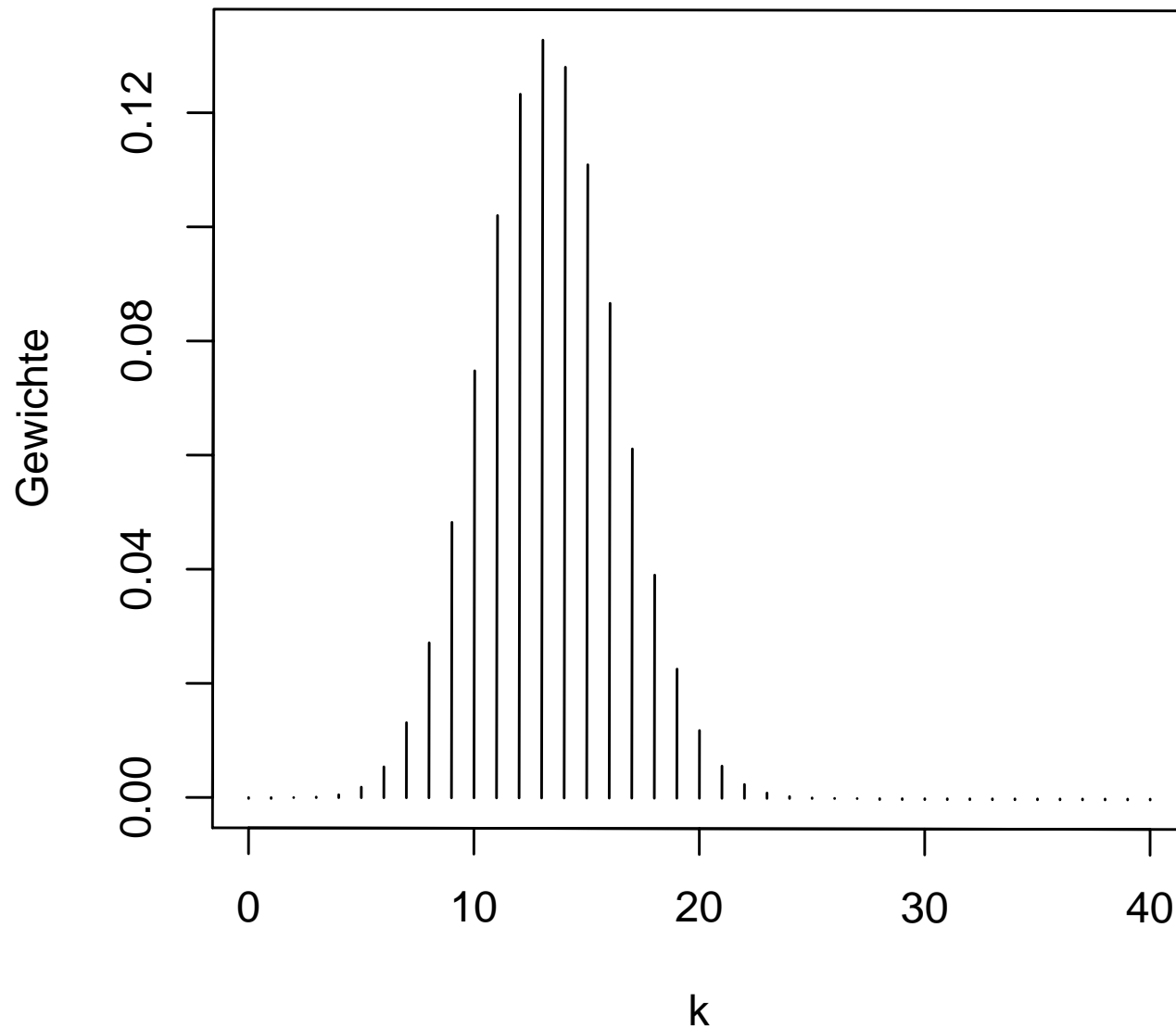
wenn

$$\mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

mit $q = 1 - p$.



Gewichte der Bin(10, 1/2) Verteilung



Gewichte der Bin(40, 1/3) Verteilung

4. Vom Ziehen mit Zurücklegen zum p -Münzwurf

(vgl. Buch S. 33)

n -maliges Ziehen *mit Zurücklegen*
aus einer ideal durchmischten Urne.

Ein Anteil p der Kugeln ist **rot**,
der restliche Anteil $q = 1 - p$ ist **blau**.

Zufällige 0-1 Folge $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$:

$Z_i = 1$ wenn beim i -ten Zug eine rote Kugel kommt,
und $Z_i = 0$ wenn beim i -ten Zug eine blaue Kugel kommt.

Sei a eine vorgegebene 0-1 Folge der Länge n mit k Einsen,

$$\text{z. B.: } a := (\underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-mal}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-k)\text{-mal}})$$

$$P(Z = a) = ?$$

Sei g die Gesamtanzahl der Kugeln in der Urne.

Die Anzahl der roten Kugeln ist pg ,

die der blauen Kugeln ist qg . Für obiges a gilt:

$$P(Z = a) = \frac{(pg)^k (qg)^{n-k}}{g^n} = p^k q^{n-k}$$

Das ist so für jede 0-1 Folge a mit k Einsen und $n - k$ Nullen.

Zur Erinnerung:

Definition (p -Münzwurf):

Sei $p \in [0, 1]$, $q := 1 - p$.

Eine Zufallsvariable Z mit Zielbereich

$$S = \{0, 1\}^n = \{a = (a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{0, 1\}\}$$

heißt **n -facher p -Münzwurf**,

wenn für alle $a \in S$ mit k Einsen und $n - k$ Nullen gilt:

$$\mathbf{P}(Z = a) = p^k q^{n-k}.$$